Exercice 1

Déterminer le module et un argument, puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivant:

$(2-2i)^5, \frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}}, \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}, \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}, \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8, \frac{(-2i)(1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^4}$

Amineta / Jely Salem / Ely. Groupe : A
Mouna / Abdallahi / Kalifa
Meimouna / Elkhalil / talba
Aichatou / Medabdallahi / Med

Solution :

$z_1 = (2-2i)^5$

$|2-2i| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg(2-2i) = \theta_1\ [2\pi]$

$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ $\arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$

Donc $|(2-2i)^5| = |2-2i|^5 = (2\sqrt{2})^5$

$= (2)^5 \times (\sqrt{2})^5 = 32\times 4\sqrt{2} = 128\sqrt{2}$

$\boxed{|(2-2i)^5| = 128\sqrt{2}}$

$\arg((2-2i)^5) = 5\arg(2-2i)$

$= 5\times -\frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$

$= 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$\boxed{\arg((2-2i)^5) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]}$

Donc : $(2-2i)^5 =$

$128\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 128\sqrt{2}\left(\cos \pi-\frac{\pi}{4} + i\sin \pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$= 128\sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 128\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$

$128\ (-1+i)$

$\boxed{F.A : -128 + 128i}$

(1)

$$z_2 = \frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}}$$

$$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\boxed{|1-i\sqrt{3}| = 2}$$

* $\arg(1-i\sqrt{3}) = \theta_2 \ [2\pi]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \ [2\pi]$$

Donc : $\left|\frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}}\right| = \frac{1}{|(1-i\sqrt{3})^{10}|}$

$$= \frac{1}{|1-i\sqrt{3}|^{10}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}}\right| = \frac{1}{1024}}$$

$$\arg\left(\frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}}\right) = -\arg\left((1-i\sqrt{3})^{10}\right)$$

$$= -10 \arg(1-i\sqrt{3}) = -10\times\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{10\pi}{3}$$

$$= \frac{6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{\arg = \frac{4\pi}{3} \ [2\pi]}$$

(2)

Donc : $\frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}} =$

$$\frac{1}{1024}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{1024}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1024}\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{1024}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{F.A : } -\frac{1}{2048} - \frac{i\sqrt{3}}{2048}}$$

$$z_3 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$$

- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$
- $|1-i\sqrt{3}| = 2$ et $\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

Donc : $\left|\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\left|\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\ast\ \arg\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right) = \arg(1+i) - \arg(1-i\sqrt{3})$

$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}\,[2\pi]$

$\boxed{\arg\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right) = \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]}$

$\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right.$

$\left. + i\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$

$\boxed{\text{F. A : } \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)}$

$z_4 = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$

$|z_4| = 1$ car de type

③

$z_4 = \frac{(1+\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}+i)}{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}+i)}$

$= \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})i}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$= \frac{2(1+\sqrt{2})+2(1+\sqrt{2})i}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$= \frac{2(1+\sqrt{2})(1+i)}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$\Rightarrow \arg z_4 = \frac{\pi}{4}$

Car de type $a(1+i)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

F. A : $z_4 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_4 : \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$* \; z_5 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$

$= \left|\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\right|^4$

$= \left|(2+\sqrt{2}| - |2-\sqrt{2}| + 2i\right.$

$\left.\sqrt{|2+\sqrt{2}|\,2-\sqrt{2}}\right|^4$

$\left|2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right|^4$

$z_5 = \left(4 e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 256 e^{i\pi}$

$\boxed{|z_5| = 256}$

$\boxed{\arg z_5 = \pi}$

F. A:

$\boxed{z_5 = -256}$

$* \; z_6 = \dfrac{|-2i|\,|1+i\sqrt{3}|^{12}}{|1+i|^4}$

$= \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{2}} \times |2e^{i\frac{\pi}{3}}|^{12}}{|\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}|^4}$

$z_6 = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot 2^{12} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{|\sqrt{2}|^4 \cdot e^{i\pi}}$

$z_6 = \dfrac{2^{13} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2^2 \cdot e^{i\pi}}$

$z_6 : 2^{11} e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{|z_6| = 2^{11}}$

$\boxed{\arg z_6 = \frac{\pi}{2}}$

F. A:

$\boxed{z_6 : 2^{11} \cdot i}$

(4)

**Exercice 4**

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $\arg\frac{z+2i}{z-i}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$
2. $\arg\frac{z+2i}{z-i}=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$
3. $\arg\frac{z+1-2i}{z-1-3i}=\frac{\pi}{3}\quad[\pi]$
4. $\arg(z-2-2i)=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$

Aminetou /ely Salem/ Ely.
Mouna / Abdallahi / Kalifa
Meimouna / elkhalil / talba
Aichatou / Med abdllahi / Med

Solution :

1) $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \arg\frac{z+2i}{z-i}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On pose : $z_A=i \quad z_B=-2i$

$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \arg\frac{z-z_B}{z-z_A}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Gamma_1$ est le demi cercle de diamètre $[AB]$ $A(0,1)$ $B(0,-2)$ exclus

2) $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \arg\frac{z-z_A}{z-z_B}=\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Gamma_2$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

3) $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow$

$\arg\frac{z+1-2i}{z-1-3i}=\frac{\pi}{3}[\pi]$

On pose : $z_K=1+3i$
$z_L=-1+2i$

$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow \arg\frac{z-z_L}{z-z_K}=\frac{\pi}{3}[\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{ML},\vec{MK})=\frac{\pi}{3}[\pi]$

$\Gamma_3$ est le cercle passant par K et L privé de K et L.

4) $M\in\Gamma_4 \Leftrightarrow$

$\arg(z-2-2i)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On pose : $z_T=2+2i$

$M\in\Gamma_4 \Leftrightarrow \arg(z-z_T)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{TM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\Gamma_4$ est la demi droite d'origine $T(2,2)$ faisant l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec le vecteur $\vec{u}$ dirigeant l'axe des abscisses.

**Exercice 7**

**Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une racine réelle :**

$$z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$$

$$z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$$

Aminetou /ely Salem/Ely
Mouna /Abdallahi /kalifa
Meimouna \ elkhalil \tolba
Aichatou / Med abdllahi / Med

Solution :

- Soit $z_0=\alpha$

$\alpha \in \mathbb{R}$ La solution réele de l'equation

$E : z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$

Alors : $\alpha^3-(6+3i)\alpha^2+(21+19i)\alpha-26(1+i)=0$

$\alpha^3-6\alpha^2-3i\alpha^2+21\alpha+19\alpha i-26-26i=0$

$\alpha^3-6\alpha^2+21\alpha-26+(-3\alpha^2+19\alpha-26)i=0$

- on résout le systéme :

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+21-26=0 & (1)\\ -3\alpha^2+19\alpha-26=0 & (2)\end{cases}$$

D'apres (2) $\Delta=b^2-4ac$

on trouve : $\alpha_1=2$ $\alpha_2=\frac{13}{3}$

En remplaçant dans (1) on trouve $\alpha_1=2$

verifier (1) et $\alpha_2=\frac{13}{3}$ ne vérifier pas (1)

(1)

Alors :

$Z_0 = 2$

• On pose :

$P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$

T. H :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-6-3i$ | $21+19i$ | $-26-26i$ |
| 2 | | 2 | $-8-6i$ | $26+26i$ |
| | 1 | $-4-3i$ | $13+13i$ | 0 |

$a = -4-3i$ $\quad P(z) = (z-2)(z^2+az+b)$

$b = 13+13i$

$\Rightarrow P(z) = (z-2)(z^2-(4+3i)z+13+13i$

• Résolvons l'équation :

$z^2 - (4+3i)z + 13+13i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4+3i)^2 - 4(13+13i)$

$= (4+3i)^2 - 52 - 52i =$

$\boxed{\Delta = -45 - 28i}$

par le calcul on obtient une racine carré $\boxed{\delta = 2-7i}$ . ②

**Exercice 10**

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.

1.Calculer $\alpha + \bar{\alpha}$ et $\alpha\bar{\alpha}$.

2. En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ ;

et que $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Aminetou / ely Salem / Ely.
Mouna / Abdallahi / Kalifa
Meimouna / Elkhalil / tolba
Aichatou / Med abdllah / Med

Solution :

$z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$\alpha = z + z^2 + z^4$

Rap : Si $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ alors : $z^n = 1$

si $|z| = 1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$

① $\bar{\alpha} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4$

On a aussi : $z^7 = 1$

$z \cdot z^6 = 1 \Rightarrow z^6 = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow \bar{z} = z^6$

$z^2 \cdot z^5 = 1 \Rightarrow z^5 = \frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow \bar{z}^2 = z^5$

$z^4 \cdot z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = \frac{1}{z^4}$

$\Rightarrow \bar{z}^4 = z^3$

Alors : $\alpha + \bar{\alpha} = z + z^2 + z^4 + z^6 + z^5 + z^3$

$1 + \alpha + \bar{\alpha} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

$1 + \alpha + \bar{\alpha} = \frac{1 - z^7}{1 - z} = 1 + \alpha + \bar{\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha + \bar{\alpha} = -1}$

$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (z + z^2 + z^4)(z^6 + z^5 + z^3)$

$= z^7 + z^6 + z^4 + z^8 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7$

$= 1 + z^6 + z^4 + z + 1 + z^5 + z^3 + z^2 + 1$

$= 2 + \underbrace{1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}$

$= 2 + \frac{1 - z^7}{1 - z} \Rightarrow \boxed{\alpha \cdot \bar{\alpha} = 2}$

①

On sait que $Re(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$

d'autre part.

$z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$\Rightarrow \alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^4$

$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$

$Re(\alpha) = \cos e^{i\frac{2\pi}{7}} + \cos e^{i\frac{4\pi}{7}} + \cos e^{i\frac{8\pi}{7}}$

Comme. $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

Donc : $Re(\alpha) = -\frac{1}{2}$

Alors:

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}}$$

En deduire que :

$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$

$z^2 = \cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}$

$z^4 = \cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7}$

$\alpha = -\frac{1}{2} + i\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right)$

$z\bar{z} = a^2 + b^2$

$\alpha\bar{\alpha} = \frac{1}{4} + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)^2$

$\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right)^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}}$$

(2)

2)

$z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$

E admet une solution $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha^3-(11+2i)\alpha^2+2(17+7i)\alpha-42=0$

$\alpha^3-11\alpha^2-2i\alpha^2+34\alpha+14\alpha i-42=0$

$\begin{cases} \alpha^3-11\alpha^2+34\alpha-42=0 \\ -2\alpha^2+14\alpha=0 \end{cases}$ $\alpha=0$ on a : $\boxed{\alpha=7}$

$P(z)=(z-7)(z^2+az+b)$
$=z^3+az^2+bz-7z^2-7az-7b$

$\begin{cases} b-7a=2(17+7i) \longrightarrow b=7a+34+14i=6 \\ a-7=-11-2i \Rightarrow a=-4-2i \\ -7b=-42 \Rightarrow b=6 \end{cases}$

$\Rightarrow P(z)=(z-7)(z^2-(4+2i)z+6)$

$P(z)=0$

$\begin{cases} z-7=0 \Rightarrow \boxed{z=7} \\ z^2-(4+2i)z+6=0 \end{cases}$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(4+2i)^2-4(6)$
$12+16i-24$

$\Delta=-12+16i$

3

les racines de l'equation du seconde degré :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{4+3i+2-7i}{2}$$

$$\boxed{z_1 = 3-2i}$$

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{4+3i-2+7i}{2}$$

$$\boxed{z_2 = 1+5i}$$

- Ensemble de Solution

$$S = \{2,\ 3-2i,\ 1+5i\}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{(-12)^2+(16)^2} = 20 \\ x^2-y^2 = -12 \\ 2xy = 16 \end{cases}$$

$S = \{7 ; 3+3i ; 1-i\}$

① + ② $\Rightarrow 2x^2 = 8$

$x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

① − ② $\Rightarrow 2y^2 = 32$

$y^2 = 16 \Rightarrow \boxed{y = \pm 4}$

$\boxed{\delta = 2 + 4i}$

$xy > 0 \Rightarrow x, y$ de même signe

$x = 2 \qquad y = 4$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{4+2i+2+4i}{2} = \frac{6+6i}{2}$$

$\boxed{z_1 = 3+3i}$

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{4+2i-2-4i}{2}$$

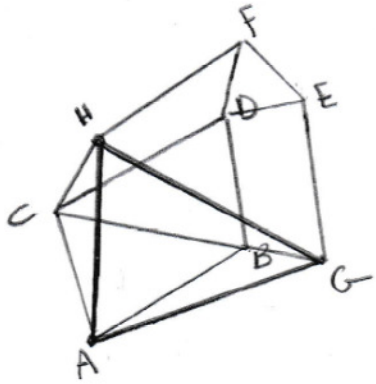
$$= \frac{2-2i}{2} \Longrightarrow \boxed{z_2 = 1-i}$$

⑤

**Exercice 13**

Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient a,b,c,d,e,f,g et h les affixes respectives des points A,B,C,D,E,F,G et H.
1) Exprimer $c-a$ en fonction de $b-a$, puis $f-d$ en fonction de $e-d$.
2) Exprimer $g$ en fonction de b,d et e ; puis $h$ en fonction de c,d et f.
3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

Aminetou /ely Salem/ Ely.
Mouna | Abdallahi | kalifa
Meimouna \ ElKhalil | talba
Aichatou /Med abdllahi /Med




Solution :

1). ABC est équilateral direct :

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)}$$

• DEF est équilateral direct :

$$\Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)}$$

2) • EDBG est un # parallélogramme

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE}$$

1

$\Rightarrow g - b = e - d$

$\Rightarrow \boxed{g = b + e - d}$

- DCHF est un parallélogramme

$\Rightarrow h - c = f - d$

$\Rightarrow \boxed{h = c + f - d}$

(3) On calcule $\dfrac{h-a}{g-a}$

- $h - a = c - a + f - d$
- $g - a = b - a + e - d$

$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$

$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a + e - d)$

$h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$

$\Rightarrow \dfrac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow$ AGH est équilatéral direct.

9

**Exercice 16**

Soit a un nombre complexe non nul. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que les points d'affixes a, aj, $aj^2$ dans cet ordre, sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

Aminetou / ely Salem / Ely.
Mouna / Abdallahi / Kalifa
Meimouna / Elkhalil / Italba
Aichatou / Mesabdillahi / Med

Solution :

Soit A, B, C les points d'affixes a, aj, $aj^2$

On pose :

$z_A = a \quad z_B = aj$

$z_C = aj^2$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{aj^2 - a}{aj - a}$$

$$= \frac{a(j^2 - 1)}{a(j-1)} = \frac{a\cancel{(j-1)}(j+1)}{a\cancel{(j-1)}} = j + 1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

(1)

$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$

Alors : ABC est équilatéral direct.

Rappel : le nombre noté j tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine cubique de l'unité on a :

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ; $j^3 = 1$ ;

$1 + j + j^2 = 0$ ; $\bar{j} = \frac{1}{j} = j^2$

**Exercice 19** Bac

Dans le plan orienté, OAB est un triangle direct non rectangle. On construit les carrés directs AONP, OBCU et BATI. On muni le plan d'un repère orthonormal d'origine O tel que n et b soient les affixes respectives de N et B.

1) Déterminer les affixes de A et U.

2) Démontrer que $AU = BN$ et $(AU)\perp(BN)$. Quelles sont les relations semblables qu'on peut déduire ?

3) Soit G le point tel que OUGN soit un parallélogramme. Démontrer que le triangle GPC est isocèle rectangle direct.

4) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$ et r le quart de tour direct de centre O.

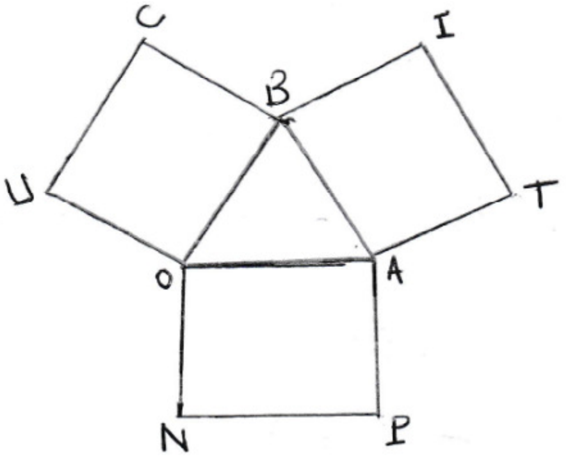
a) Déterminer l'image de G par $r\circ t$.

b) Soit C' le symétrique de C par rapport à B. Montrer que $r(C') = C$ puis déterminer $r\circ t(B)$.

c) En déduire que $AC = GB$ et $(AC)\perp(GB)$.

Aminetou / ely Salem / ely
Mouna / Abdallahi / Kalifa
Aichaton / Med abdallahi / Med
Meimouna / Elkalil / Talba .

Solution :




1 comme le Triangle ONA est rectangle en O isocèle et direct on a donc.

$$\frac{z_A - z_O}{z_N - z_O} = i$$

Çad

$$\frac{a - 0}{N - 0} = i$$

$\Rightarrow \boxed{a = ni}$

De même : OBU est rectangle en O isocèle et direct

D'où : $\frac{z_U - z_O}{z_B - z_O} = i$

Çad : $\frac{U}{B} = i$

$\Rightarrow \boxed{U = bi}$

2 $(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{AU}) = \arg\left(\frac{u - a}{n - b}\right)$

$= \arg\left(\frac{ib - in}{n - b}\right) = \arg\left(\frac{-i\cancel{(n-b)}}{\cancel{n-b}}\right)$

$= \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}\ [2\pi].$

1

et

$$\frac{AU}{BN} = \left|\frac{u-a}{n-b}\right| = \left|-i\frac{(n-b)}{(n-b)}\right|$$

$$= |-i| = 1$$

D'ou : $\boxed{\begin{cases} (BN) \perp (AU) \\ \text{et} \\ BN = AU \end{cases}}$ ①

La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transform O en I et T en B

d'ou : $\boxed{\begin{cases} BP = OT \\ \text{et} \\ (BP) \perp (OT) \end{cases}}$

• De même : la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme A en I et C en O

D'ou : $\boxed{\begin{cases} OI = CA \\ (OI) \perp (CA) \end{cases}}$

③ $\vec{GP} = \vec{GN} + \vec{NP}$

$= \vec{UO} + \vec{OA}$

$\vec{GP} = \vec{UA}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} GP = UA \\ \text{et} \\ (GP) \cancel{\perp} // (UA) \end{cases}}$ ②

De même :

$\vec{GC} = \vec{GU} + \vec{UC}$

$= \vec{NO} + \vec{OB}$

$\vec{GC} = \vec{NB}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} GC = NB \\ \text{et} \\ (GC) \cancel{\perp} // (NB) \end{cases}}$ ③

De ① ② ③ on a :

$\boxed{\begin{cases} GP = GC \\ (GP) \perp (GC) \end{cases}}$

D'ou , le Triangle GPC est rectangle et isocèle en G.

④ a) $r \circ t(C) = r(t(G))$

$= r(N) = A$

$\boxed{r \circ t(G) = A}$

b) comme le Triangle OBC est rectangle en B isocele est direct et comme c'est le symetrie de C par rapport a B le Triangle OBc est donc rectangle en B isocele et indirect

Donc : le Triangle OCC' est rectangle en O isocele et direct

D'ou : $\boxed{r(C') = C}$

$* \; rot(B) = r(t(B)) = r(C') = C$

$\boxed{rot(B) = C}$

c) comme rot est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et comme $\begin{cases} rot(G) = A \\ rot(B) = C \end{cases}$

on a donc : $\begin{cases} AC = GB \\ (\vec{GB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$

D'ou : $\begin{cases} AC = GB \\ (AC) \perp (GB) \end{cases}$ (3)